

Die Offenbarung der Symmetrie

Warum die Amerikaner John G. Thompson und der Belgier Jacques Tits den „Nobelpreis“ der Mathematik erhalten

Von Ehrhard Behrends

S tolze 750 000 Euro: Das ist die Preissumme des Abelpreises, mit dem die norwegische Akademie der Wissenschaften in jedem Jahr herausragende Forschungsleistungen in der Mathematik würdigt. Am kommenden Dienstag werden die beiden Wissenschaftler John G. Thompson aus den Vereinigten Staaten und der Belgier Jacques Tits in Oslo den Abelpreis aus der Hand von König Harald in Empfang nehmen dürfen. Die beiden haben wesentlich dazu beigetragen, dass Mathematiker heute einen vollständigen Überblick über die so genannten „endlichen Gruppen“ haben.

Mit Gruppen sind hier natürlich nicht Pop-Gruppen oder Menschenansammlungen gemeint. Den mathematischen Begriff der „Gruppe“ kann man am leichtesten über Symmetrien erklären. Mathematiker verstehen unter einer Symmetrie die Möglichkeit, ein Objekt – zum Beispiel eine quadratische Kachel – so zu bewegen, dass es nach der Bewegung exakt wieder so erscheint wie zuvor. Ein Quadrat kann man an einer daneben liegenden, waagerechten Achse spiegeln, ohne es sich dabei in seiner Form verändert. Das Quadrat bleibt ein Quadrat. Es sieht nach der Spiegelung genau so aus wie vorher und ist mit dem Original deckungsgleich. Mathematiker bezeichnen dies als eine „Spiegelsymmetrie.“

Ein weiteres, relativ anschauliches Beispiel sind Sechsecke, die man durch Drehungen um 60 Grad (also 360 Grad geteilt durch sechs) in sich überführen kann. Das ist dann eine „Rotationssymmetrie“.

Symmetrien spielen bekanntlich in der Kunst und der Architektur eine wichtige Rolle, denn sie gelten als ästhetisch. Auch lassen sich in der Natur selber unzählige Beispiele finden – zum Beispiel rotations-symmetrische Schneeflocken. Da ist es nicht verwunderlich, dass Symmetrien auch für Physiker von fundamentaler Bedeutung sind. Nach einem Ergebnis der deutsch-amerikanischen Mathematikerin und Physikerin Emmy Noether (1882–1935) entspricht in der Physik jede Symmetrie einem Erhaltungssatz. Der berühmte Energieerhaltungssatz folgt nach dem Noether-Theorem aus einer Symmetrie der Zeit. Symmetrien in einem verallgemeinerten Sinn spielen eine sehr große Rolle in der Elementarteilchen- und Atomphysik. Einem Atom ist es schließlich egal, in welcher Reihenfolge ein Forscher die Elektronen eines Energieniveaus durchnummeriert, das heißt, eine Veränderung in der Reihenfolge führt immer zum gleichen Ergebnis.

Eine Symmetriegruppe – und jetzt wird es echt mathematisch – ist die Gesamtheit aller möglichen Symmetrien. Zum Beispiel besteht die Symmetriegruppe eines Quadrats aus allen Drehungen um positive wie negative Vielfache von 90 Grad sowie aus den Spiegelungen an waagerechten und senkrechten Achsen, sowie den Diagonalen. Eine Gruppe ist also ein abstraktes mathematisches Objekt, erschaffen von Mathematikerhirnen. Die wesentlichen Eigenschaften einer Symmetriegruppe sind: Das Kombination von erlaubten Aktionen ist ebenfalls zulässig. Und jede Aktion lässt sich auch wieder rückgängig machen.

Gruppen begreifen, kann man im wahrsten Sinne des Wortes am besten mit Hilfe eines Zauberwürfel – dem Rubik's Cube. Vor zwei Jahrzehnten war der Würfel mit seinen neun bunten und vielfältig verdrehbaren Teil-



Die möglichen Drehungen am „Rubik's Cube“ sind ein Beispiel für Gruppen – das Arbeitsgebiet von Thompson und Tits. Vor einigen Jahrzehnten fehlte der Würfel in fast keinem Kinderzimmer. Ihn von der verdrehten in die Ursprungsform (u. r.) zu bringen, ist allerdings kein Kinderspiel. Heute weiß man, dass maximal 26 Drehungen ausreichen, um die richtige Abfolge wiederherzustellen. FOTOS: PA/REDMAN

flächen auf jeder seiner sechs Seiten in fast jedem Kinderzimmer zu finden. Viele werden noch wissen, dass man schon nach wenigen Drehungen jeden Überblick verlieren kann, wie denn nun der Urzustand wieder hergestellt werden könnte. Die endlichen Abfolgen von erlaubten Drehungen bilden wiederum eine mathematische Gruppe – es lassen sich Aktionen nacheinander ausführen und wieder rückgängig machen.

Durch solche Kombinationen von Drehungen kann der Würfel in eine gigantische Zahl von verschiedenen Formmustern gebracht werden. Es sind rund 43 Trilliarden verschiedene Zustände möglich. Die hohe Kunst besteht nun darin, mit möglichst wenigen Drehungen den Ausgangszustand mit farblich einheitlichen Seitenflächen wieder zu erreichen. Heute weiß man, dass in jedem Fall 26 Drehungen ausreichen, um die optimale Abfolge zu finden, kann aber sehr schwierig sein. Die Gruppentheorie kann hier helfen.

Der Begriff der Gruppe tauchten in der Mathematik erstmals zu Beginn des 19. Jahrhunderts auf. Im Lauf der Zeit wurde immer klarer, dass sie fundamental wichtig sind. Nachdem sich eine Menge von Einzelergebnissen angesammelt hatte, wurde die

Notwendigkeit immer deutlicher, eine vollständige Beschreibung aller möglichen Gruppen angeben zu können. Dabei ging es vorrangig um Gruppen mit endlich vielen Elementen. Im Fall unendlicher Gruppen – auch das gibt es – ist allerdings keine Klassifizierung zu erwarten.

Schnell wurde den Mathematikern klar, dass man alle Gruppen aus „einfachen“ Gruppen zusammensetzen kann – so, wie natürliche Zahlen als Produkt von Primzahlen darstellbar sind. Man musste also „nur“ einen Katalog der „einfachen“ Gruppen finden. Das war das Ziel des ehrgeizigen „classification projects“, das von Daniel Gorenstein initiiert und von vielen Kollegen in aller Welt umgesetzt wurde.

Nach vielen Jahren Arbeit und einigen Tausend Seiten schwer verdäulicher mathematischer Fachliteratur war es schließlich so weit. Man kennt alle endlichen „einfachen“ Gruppen. Es gibt eine Reihe von relativ unkompliziert zu beschreibenden Familien aber außerdem einige wirklich „pathologische Kandidaten“ – die sogenannten sporadischen Gruppen.

Aus der Gemeinschaftsleistung ragt an dieser Stelle der besondere Anteil der Abelpreisträger Thompson und Tits heraus. Durch ein schwierig zu beweisendes Ergebnis von Thompson – die zugehörige Arbeit war mehrere hundert Seiten lang – konnte der Fall von Gruppen mit ungerader Ordnung erledigt werden. Tits wiederum konnte Verfahren aus der Geometrie und Kombinatorik auf die Gruppentheorie übertragen.

Dadurch wurden die letzten Schwierigkeiten bei der Klassifizierung von Gruppen aus dem Weg geräumt.

Bei der feierlichen Zeremonie am 20. Mai werden auch Berliner Schüler anwesend sein. Die norwegische Akademie der Wissenschaften hat nämlich seit Jahren so etwas wie die Patenschaft beim „Tag der Mathematik“ übernommen, einem Wettbewerb der Berliner Schüler. Das Siegerteam darf zur Preisvergabe nach Oslo reisen.

Jacques Tits



Der Belgier Jacques Tits wurde 1930 in Uccle geboren. In den 60er-Jahren arbeitete er viel über algebraische Gruppen. Er ist der Erfinder der Theorie Gebäude kombinatorischer Strukturen. Er beschäftigte sich intensiv mit so genannten „endlichen einfachen Gruppen“. Die „einfache sporadische Tits-Gruppe“ ist nach ihm benannt. Tits war Professor an den Universitäten in Brüssel, Bonn und am Collège de France in Paris, wo er auch heute noch Ehrenprofessor ist. Tits ist Träger des Wolf-Preises (1993) und der Georg-Cantor-Medaille (1996).

John G. Thompson



Der Mathematiker John Grigg Thompson wurde 1932 in Ottawa geboren und lehrte an den Universitäten Harvard, Chicago, Cambridge (England) und Florida. Er wurde durch seine Forschung im Bereich der Gruppentheorie weltbekannt. Thompson wurde bereits mit dem Colepreis (1965), der Fields-Medaille (1970) und dem Wolf-Preis (1992) geehrt. Die Thompson-Gruppe „Th“, eine der sporadischen endlichen einfachen Gruppen, ist nach ihm benannt. Genauer klassifizierte er die Gruppen mit auflösbaren lokalen Untergruppen.

Verkanntes Genie



Der Namensgeber des Preises, Niels-Henrik Abel (1802–1829), gilt heute als mathematisches Genie, das allerdings in seiner Heimat Norwegen keine Möglichkeit fand, mit seiner Begabung seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Sein Leben war von Entbehrung und Krankheit geprägt. Der Ruf auf eine Professur in Berlin, der eine Wende bedeutet hätte, erreichte ihn zu spät: Er war wenige Tage zuvor im Alter von nur 27 Jahren gestorben. Gleichwohl hat sich der Forscher durch viele fundamentale Entdeckungen einen Platz im Olymp der Mathematik gesichert. Etwa durch den Beweis der Tatsache, dass schon bei Gleichungen mit nur einer Unbekannten x, in denen x zur fünften Potenz (x⁵) auftritt, keine Formeln mehr angegeben werden können, mit denen sich Lösungen bestimmen lassen. Bis zur vierten Potenz klappt das, wie man seit Jahrhunderten weiß. Zweite Potenzen sind sogar vielen noch aus der Schule bekannt: Bei quadratischen Gleichungen lassen sich die beiden Lösungen mit der „p-q-Formel“ berechnen. Norwegen ehrt sein damals verkanntes Mathematik-Genie seit 2003 durch den Abelpreis, dessen Preissumme auf dem Niveau der Nobelpreise ist.

FRAGE der Woche

Was versteht man unter Orogenese?

- A** Orogenese ist die Entwicklung der weiblichen Geschlechtszellen bei Tieren und Mensch
- B** Es handelt sich um die Ablage von Eiern, und zwar im engeren Sinne von Eiern, die noch unbefruchtet sind oder beim Ablegen befruchtet werden
- C** Orogenese ist die Entwicklung des einzelnen Lebewesens
- D** Gebirgsbildung, eine vergleichsweise kurzfristige, aber nachhaltige Verformung begrenzter Bereiche der Erdkruste

Wenn Sie Antworten auf spannenden Fragen suchen, bestellen Sie das WELT LEXIKON. Es gibt einen Überblick über das Wissen des 21. Jahrhunderts und besteht aus 21 Bänden, die alle Wissensgebiete auf aktuellem Stand darstellen. Es wurde in Kooperation mit dem Brockhaus Verlag erstellt. Sie können das WELT LEXIKON telefonisch bestellen: **Hotline: 01895/55 83 48** (14 Cent aus dem deutschen Festnetz). Oder bestellen Sie online: www.welt-edition.de. Das Lexikon ist auch im ausgewählten Buch- und Zeitschriftenhandel erhältlich. Versand und Rechnungsstellung erfolgen durch den Verlag Brockhaus.

- Lösung:**
A Oogenese
B Oviparie
C Ontogenese
D richtig

Testen Sie Ihr Wissen: welt.de/lexikon

WISSENSCHAFT

PALÄONTOLOGIE

Papageien kommen aus Europa
 Papageien haben vor 55 Millionen Jahren in Nordeuropa gelebt – und nicht wie bisher angenommen nur in südlicheren Gefilden. Die Forscher gehen zudem davon aus, dass sie das älteste Papageien-Fossil entdeckt haben, wie sie in der Fachzeitschrift „Palaeontology“ berichten. Die neue Art trägt den offiziellen Namen *Mopsitta tanta*. Die Forscher gaben ihr jedoch den Spitznamen „Danish Blue“ – in Anlehnung an den Sketch „Der Papagei ist tot“ der Komikertruppe Monty Python. Der 55 Millionen Jahre alte Papageienknochen stammt aus einem Steinbruch in Dänemark. „Mopsitta ist das älteste und nördlichste Überbleibsel eines Papageis, das jemals gefunden wurde“, sagte David Waterhouse, der von der Universität Dublin unterstützt wurde. Bisher sei kein Papageien-Fossil in der südlichen Hemisphäre gefunden worden, das älter als 15 Millionen Jahre ist. „Vermutlich haben sich Papageien in der nördlichen Hemisphäre entwickelt, bevor sie sich im Süden und später in den Tropen verbreiteten.“ *dpa*

KLIMA

Kohlendioxid am Südpol
 Die Kohlendioxidkonzentration in der Luft hat heute ihren höchsten Stand seit rund 800 000 Jahren erreicht. Mit Analysen von Luftblasen im ewigen Eis der Antarktis gelang es Forschern erstmals, so weit in die Klimageschichte zurückzugehen. Die Bohrungen gingen bis zu 3270 Meter tief und lieferten Daten, die 150 000 Jahre weiter als je zuvor in die Vergangenheit zurückreichen, so die Forscher in „Nature“. Ihre Studie belege abermals die hohe Korrelation zwischen Kohlendioxidkonzentration und Temperaturanstieg. Die höchsten Temperaturen herrschten vor 320 000 Jahren, damals war es am Südpol zwischen drei und fünf Grad wärmer als heute. Der CO₂-Gehalt betrug 320 Teile pro Million (ppm). Heute liegt er bei 380 ppm. *AP*

MEDIZIN

Unwirksame Malariamittel

Ein großer Teil der Malaria-Medikamente, die in Ostafrika im Umlauf sind, sind gefälscht und unwirksam. Nach Testkäufen in privaten Apotheken in Ruanda, Burundi, Kenia und Tansania habe sich herausgestellt, dass 35 Prozent der Medikamente entweder nicht genügend Inhaltsstoffe haben, um Malaria wirksam zu bekämpfen, oder sich nicht schnell genug im Körper auflösen, so die ruandische Nachrichtenagentur RNA. In Ghana und Nigeria sehe es ähnlich aus. „Die Ergebnisse sind keine gute Nachricht für diejenigen, die diese Medikamente nehmen“, sagte Richard Tren von der Organisation Africa Fighting Malaria, die die Studie finanziert hatte. Die Hälfte der in Afrika hergestellten Medikamente und ein Drittel der Importe aus Asien hätten den Test nicht bestanden. *dpa*

Die effizienten Räuber

Allein an der Form erkennen Etruskerspitzmäuse ihre Beute – Die kleinsten Säuger jagen Insekten, die so groß sind wie sie

Von Pia Heinemann

Winzig ist sie – und ein unermüdlicher Kämpfer. Die Etruskerspitzmaus, *Suncus etruscus*, ist eines der kleinsten Säugetiere der Welt: vier Zentimeter lang, zwei Gramm schwer. Und die Südeuropäerin jagt Heuschrecken, die etwa genauso groß sind, wie sie selbst. „Dabei ist sie völlig furchtlos“, sagt Michael Brecht, Professor am Berliner Bernstein Center for Computational Neuroscience. „Sie geht auf fast alles los, was irgendwie nach Grille aussieht.“

Wie die Minispitzmaus ihren Kampfgeist im Gehirn verarbeitet, hat er mit seiner Arbeitsgruppe erforscht. „Die Etruskerspitzmaus tastet ihre Beute mit ihren Schnurrhaaren blitzschnell ab und ändert, wenn nötig, sehr schnell ihre Jagdstrategie“, erklärt Brecht. Für Heuschrecken gibt es da kein Entkommen. „Es ist im Grunde ihre Zielsicherheit und ihre schnelle Reaktionsfähigkeit, die sie so erfolgreich jagen lässt“, sagt Brecht auf dem

internationalen Kongress über die Entwicklung und Funktion des Tastsinns und des Schmerzempfindens des Max-Delbrück-Centrums für Molekulare Medizin.

Je kleiner ein Tier ist, desto mehr Wärme verliert es über seine Körperoberfläche. Um nicht zu verhungern, muss die Etruskerspitzmaus entsprechend viel frischen. Täglich verzehrt sie deshalb das

Doppelte ihres Körpergewichts. Proteinsreiche Heuschrecken, Schaben und Spinnen jagt und frisst sie. Da die Beutetiere fast genauso groß sind wie ihr Jäger, muss die Spitzmaus schnell und gezielt angreifen. Auch weil sie nachts jagt, muss sie sich auf ihren Tastsinn verlassen. Mit langen Schnurrhaaren ortet sie ihre Beute. „Etwa 75 Prozent der sensorischen Re-

gionen des Gehirns sind allein für die Verarbeitung von Tastsinformationen zuständig“, sagt Brecht. „Da sie nachts ohnehin kaum sehen, entfallen auf optische Informationen nur zehn, auf Geräuschverarbeitung 15 Prozent der Hirnmasse.“

So kann sie ihre potenzielle Beute orten und erkennen, wen genau sie vor sich hat. Danach tötet die Spitzmaus ihre Beute durch gezielte Angriffe. Um eine Heuschrecke zu töten, beißt die Spitzmaus dem Insekt gezielt in den Rücken. Dass Etruskerspitzmäuse in Rage geraten, wenn irgendetwas auch nur entfernt an eine Heuschrecke erinnert, zeigten die Forscher mit einem kleinen Trick. Sie präsentierten den Mäusen diverse Insektenattrappen. Sobald diese Plastikdummies zwei stilisierte Sprungbeine hatten, griffen die Mäuse an. Dass sich der Dummy weder bewegte noch nach Heuschrecke roch war den Mäusen egal. Sie attackierten sie bis zu 15 Mal.

„Die Etruskerspitzmaus verlässt sich in einem Ausmaß auf den Tastsinn und die

taktile Formerkennung, wie wir es von keiner anderen Tierart kennen“, so Brecht. Und offenbar erkennen sie die Form ganzheitlich. Denn egal, ob eine Heuschrecke groß oder klein war – die Mäuse gingen ohne Unterschied auf sie los. Eine Attrappe ohne oder mit vier Sprungbeinen hingegen ließen die Kämpfer in Ruhe.

„Auch auf neue Situationen kann das Tier blitzschnell reagieren“, so Brecht. Um dies zu untersuchen, tauschten die Forscher lebende Heuschrecken gegen Riesenschaben aus. Für die Mäuse ein klarer Nachteil, da die Schaben einen für Mäusekieferviel zu harten Rückenpanzer besitzen. Doch Hunger und Kampfgeist machen erfinderrisch: Nach erstaunlich kurzer Zeit legten die Mäuse ihre natürliche Jagdstrategie ab. Schnell hatte sie erkannt, dass der Bauch der Schabe ihre Schwachstelle ist. „Sie lernt während der Jagd und wendet das neue Wissen sofort an“, so Michael Brecht. „Auch Riesenschaben entkommen ihr nicht.“



Etruskerspitzmaus: Nur zwei Gramm schwer, 35 Millimeter lang und doch ein echter Kämpfer – zumindest wenn Heuschrecken oder Riesenschaben als Belohnung locken