TERA BUFFON REALMENTE LANGADO AGULHAS?

EHRHARD BEHRENDS AND JORGE BUESCU

Resumo. O problema da agulha de Buffon permite obter aproximagues ao valor de π atravis da realizagco de experijncias fmsicas ou computacionais no espmrito do Mitodo de Monte Carlo. I muito frequente a atribuigco desta ideia ao prsprio Buffon. Mostra-se neste artigo que nco ss nco existe qualquer registo histsrico neste sentido como i extremamente improvavel que Buffon tenha alguma vez considerado uma abordagem experimental ao problema da agulha. Essa concepgco errada deriva provavelmente de um mal-entendido histsrico que se identifica a partir dos textos originais.

1. A experijncia da agulha de Buffon

Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), i famoso pela seguinte "experijncia":

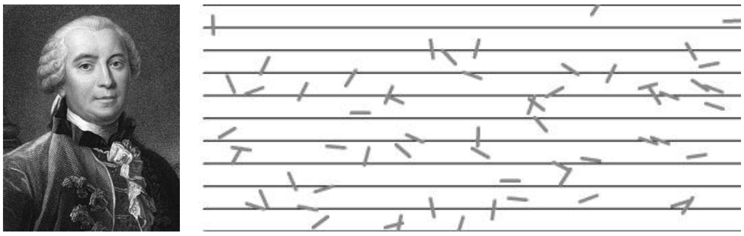
> Suponhamos que estamos numa sala cujo chco i constitumdo por tabuas paralelas. Designemos a distbncia entre as tabuas por a. Tomemos uma agulha, ou um objecto semelhante, de comprimento $2r$ menor do que a. Esta condigco assegura que, se deixarmos cair a agulha no chco, ela atravessara quando muito uma linha que divide tabuas diferentes.
>
> A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto i, que a agulha, ao cair no chco, nco fique totalmente contida no interior de uma znica tabua) i entco $P = 4r/\pi a$. Esta fsrmula contim a constante π – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via "experimental". Sera necessario, evidentemente, atirar a agulha um "grande nzmero de vezes", que designaremos por n. Se a agulha atravessar a linha divissria entre duas tabuas k vezes ao fim de n tentativas, entco a frequjncia relativa k/n devera ser uma boa aproximagco de P; resolvendo a equagco anterior em ordem a π obtemos $\pi = 4r/Pa$, pelo que a aproximagco obtida conduzira a um valor aproximado de π. *Voil'!*

I claro que, em vez de agulhas e de um soalho de tabuas, podemos utilizar simplesmente papel e fssforos ou alfinetes; a znica restrigco i que a distbncia entre as linhas seja maior do que o comprimento da agulha (ou do objecto correspondente que esteja a ser utilizado).

I geralmente aceite que a experijncia da agulha de Buffon representa a primeira aplicagco do Mitodo de Monte Carlo da Histsria da Matematica; ou seja, a primeira vez em que se utiliza um mitodo aleatsrio para resolver, de forma aproximada, um problema computacional. Estes mitodos podem ser

Date: 2-7-2014.

utilizados com grande sucesso, por exemplo, para calcular integrais definidos em dommnios multidimensionais ou para resolver inzmeros problemas de contagem.



Buffon e a "experijncia da agulha".

2. Os factos

A fammlia de Buffon enriqueceu por via de heranga e, assim, ainda na sua juventude, Buffon tornou-se financeiramente independente. Como muitos dos seus contemporbneos, deixou-se fascinar pelo acelerado progresso das cijncias naturais no siculo XVIII. Na verdade, os seus interesses eram universais. Os seus estudos conduziram-no a conceber uma enciclopidia em cinquenta volumes, *Histoire naturelle, générale et particulière*, dos quais foram publicados os primeiros trinta e seis. A partir de 1739, foi o administrador dos jardins reais de Paris ("Jardin Royal", hoje "Jardin des Plantes"). Ainda hoje chegam ati nss ecos destas suas fungues: i no quinto *arrondissement*, na extremidade sul do Jardin des Plantes, prsximo do Campus de Jussieu, que se situa a Rue Buffon.

La Rue Buffon.

Havia planos para esta rua desempenhar um papel importante em Novembro de 2013, como parte de uma acgco para a divulgagco da Matematica. A Comissco RPA ("Raising Public Awareness") da European Mathematical Society (EMS) reuniu-se nesse mjs em Paris, e surgiu a ideia de "reconstituir" a experijncia de Buffon, simbolicamente, na prspria Rue Buffon. As condigues nco podiam ser mais propmcias: a Matematica correspondente pode ser facilmente compreendida por um pzblico leigo – nco sendo, por outro lado, completamente trivial – e, com contactos apropriados e alguma preparagco profissional, seria razoavel esperar uma boa cobertura mediatica, realizando assim uma acgco significativa para a divulgagco da Matematica.

No entanto, este projecto acabou por ser cancelado. Quando alguns membros da Comissco entraram em contacto com o historiador da Matematica parisiense Bernard Bru para esclarecer pormenores sobre a experijncia da agulha de Buffon, aperceberam-se de que nco existem quaisquer registos histsricos no sentido de Buffon ter concebido uma ligagco entre as suas dedugues tesricas e um calculo aproximado de π, nem no sentido de alguma vez ter realizado, ou sequer proposto, a sua famosa "experijncia". Estamos assim, pois, perante uma interessante manifestagco do facto de a verdade histsrica e "o conhecimento geralmente aceite" terem por vezes pouca relagco entre si. Iremos passar a analisar mais pormenorizadamente as razues desta curiosa discrepbncia entre factos e idealizagues.

Comegamos por enumerar os seguintes factos documentalmente comprovados.

1. Em Maio de 1733, Buffon submeteu ‘ Acadimie Royale des Sciences (da qual se tornaria membro em 1734) um artigo em que, entre outros problemas geomitricos, calculava correctamente a probabilidade de um objecto filiforme de comprimento $2r$, atirado de forma aleatsria, intersectar uma de varias linhas paralelas separadas por uma distbncia constante a (com $2r < a$):

> Sur un plancher qui n'est formé que de planches égales & parallèles, on jette une Baguette d'une certaine longueur, & qu'on suppose sans largeur. Quand tombera-t-elle franchement sur une seule planche?[1] ([2], pp. 44).

Depois de deduzir a sua fsrmula, Buffon sublinha que ela pode ser utilizada para determinar o valor de a para o qual a probabilidade de o pau cair no interior de uma znica tabua i 50%: "Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a ditermini par une aire de Cycloïde avec beaucoup d' iligance au jugement de l'Acadimie"[2] ([2], pp. 45).

O resumo da apresentagco de Buffon ‘ Academia esta publicado em [2] na secgco de Geometria; o seu manuscrito original parece, contudo, nunca ter sido publicado [7].

2. Mais de quarenta anos depois, Buffon voltou a este problema de forma mais extensa em 1777, no seu "Éssai d'Arithmitique morale", contido na *Histoire naturelle*. A sua leitura revela claramente que a motivagco principal para as suas investigagues residia no calculo de probabilidades para jogadores:

> Je suppose que, dans une chambre dont le parquet est simplement divisé par des points parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes des ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. (On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête).[3] ([3], pp. 411ff.)

[1]Tradugco livre: "Sobre um soalho formado por tabuas iguais e paralelas deixa-se cair um pau com um certo comprimento, e que se supora sem espessura. Quando caira ele sobre uma znica tabua?"

[2]Tradugco livre: "Existe, portanto, uma certa largura das tabuas que faz com que esta aposta, ou jogo, seja justo, e foi isso o que M. LeClerc determinou por meio da area de uma ciclside, de forma muito elegante na opinico desta Academia".

[3]Tradugco livre: "Suponho agora que, numa sala cujo soalho se encontra simplesmente dividido por linhas paralelas, se atira um pau ao ar, e um jogador aposta que o pau nco

3. No intervalo de mais de 40 anos entre estas duas referjncias escritas, as znicas que se lhe conhecem sobre esta questco, Buffon realizou de facto uma investigagco experimental — nco relativa ao problema da agulha, mas sim ‘quele que i hoje conhecido como Paradoxo de S. Petersburgo. Sucintamente, este baseia-se num jogo em que se langa repetidamente ao ar uma moeda equilibrada ati cair com a face voltada para cima. Se este acontecimento se verificar no k-isimo langamento, o jogador ganha 2^k ducados. I facil verificar que o valor esperado do primio i infinito, pelo que seria de esperar que o valor justo que um jogador tem de pagar para o jogar fosse, tambim ele, infinito.

Buffon descreve o jogo em [3], no inmcio da pagina 394. Na pagina 399, afirma ter realizado estudos experimentais relacionados com este problema:

> J’ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c’est-à-dire j’ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu, en faisant jeter la pièce par un enfant.[4]

4. Laplace considerou, no seu tratado de 1812 sobre Teoria de Probabilidades [9], o problema da agulha — nco atribuindo a sua origem a Buffon mas referindo explicitamente, tanto quanto se sabe pela primeira vez, a possibilidade de utilizar os calculos tesricos para determinar uma aproximagco experimental para π. De facto, depois de determinar a probabilidade de uma linha ser cortada pela agulha, escreve Laplace:

> Si l’on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l’une des divisions du plan au nombre total des projections sera, à très peu près, la valeur de $4r/(a\pi)$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π.[5] ([9], pp. 366).

5. O problema da agulha de Buffon parece ter despertado interesse por experijncias reais a partir de meados do siculo XIX. O primeiro estudo experimental documentado data de 1850 e foi realizado por Rudolf Wolf (1816–1893) [13], entco professor na Universidade de Berna. Curiosamente, Wolf tomou conhecimento do resultado por via indirecta, atravis da enciclopidia *Un million de faits* de Lallane (1843), que nco referia a sua origem. Wolf ignorava pois na altura que o problema era devido a Buffon. Augustus de Morgan refere em 1859 ([11], pp. 283-4) que um certo Mr. Ambrose Smith realizou a experijncia em 1855 com 3204 langamentos e um estudante seu com 600 langamentos. O astrsnomo americano Asaph Hall (que, curiosamente, atribui o problema a Laplace) descreve [6] um conjunto de experijncias com mais de meio milhar de langamentos cada uma, realizado

---

cruzara nenhuma das linhas paralelas do soalho, ao passo que o outro, pelo contrario, aposta que o pau cruzara uma dessas linhas paralelas. Pede-se entco a probabilidade de sucesso de cada jogador (pode jogar-se este jogo num tabuleiro de damas com uma agulha de coser ou com alfinetes sem cabega).”

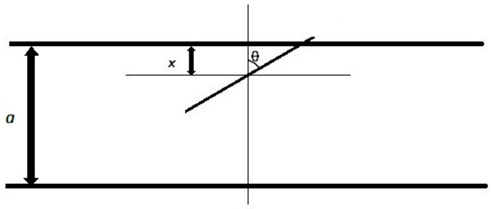
[4]Tradugco livre: “Realizei 2048 experijncias relativas a esta questco, isto i, joguei este jogo 2048 vezes, utilizando uma crianga para atirar a moeda ao ar.”

[5]Tradugco livre: “Se se langar ao ar este cilindro um grande nzmero de vezes, o quociente entre o nzmero total de vezes em que o cilindro corta uma das linhas e o nzmero total de langamentos tera aproximadamente o valor $4r/a\pi$, o que permitira determinar o valor da circunferjncia 2π.”

em 1864 pelo seu amigo Capitco O. C. Fox, imobilizado por um ferimento de guerra.

3. Dos factos ‘ ficgco

A demonstragco do resultado tesrico de Buffon em linguagem moderna i simples. Suponhamos, como ati aqui, que a agulha tem comprimento $2r < a$, em que a i a distbncia entre tabuas. Designemos por x a distbncia entre o centro da agulha e a tabua mais prsxima e por θ o bngulo entre a agulha e a perpendicular ‘ direcgco das tabuas.



Demonstragco do resultado de Buffon.

I geometricamente claro que as condigues para que a agulha intersecte duas tabuas sco $x \leq r$ e $\cos\theta \leq \frac{x}{r}$. Integrando sobre os possmveis valores de x, obtemos o resultado de Buffon:

$$P = \frac{2}{a}\int_0^r \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{r}\right)\,dx = \frac{4r}{\pi a}.$$

Como ja referido e admirado por Fontenelle, o mitodo de Buffon nco parece ter sido este mas o de calcular a area por baixo de um trogo de ciclside [7].

Quanto aos dados obtidos de forma experimental, a analise i mais subtil. A primeira pergunta a fazer i a seguinte: qual a precisco que podemos esperar de experijncias deste tipo? A teoria afirma que o melhor que se pode obter sco resultados do seguinte tipo. Se langarmos a agulha n vezes e ela cruzar uma linha k vezes, utilizando a razco k/n para calcular uma aproximagco a π, entco com uma certa probabilidade p o resultado estara numa certa vizinhanga ϵ de π. Podemos entco escolher um valor de p prsximo de 1 e um valor de ϵ (pequeno), obtendo majoragues para o erro cometido utilizando, por exemplo, a desigualdade de Chebyshev. Infelizmente, para valores de p razoavelmente elevados e de ϵ nco demasiado grandes, os calculos revelam que o valor de n i astronomicamente elevado e a convergjncia extraordinariamente lenta. O mitodo da agulha de Buffon nco i, pois, adequado para obter informagco sobre os algarismos de π.

Vale a pena salientar, a este propssito, os resultados das experijncias relatadas em 1901 por Lazzarini, que afirmou, apss ter efectuado uma experijncia com 408 langamentos, obter uma aproximagco para o valor de π correcta ati ‘ sexta casa decimal ([8], p. 120). Artigos recentes de Gridgeman [5] e Badger [1] contrariam esta afirmagco, classificando-a como extraordinariamente improvavel e atribuindo-a a uma presummvel manipulagco dos dados.

Nos dias de hoje, evidentemente, a experijncia da agulha de Buffon pode ser muito facilmente simulada por computador, sem necessidade de experijncias fmsicas, existindo ati inzmeras aplicagues para o efeito disponmveis na Web.

Em notavel contraste com o registo histsrico, subsiste na comunidade matematica uma impressco generalizada de que Buffon teria nco apenas considerado a possibilidade de determinar uma aproximagco ao valor de π por meio de uma “experijncia” como, de facto, a teria mesmo chegado a realizar. Descrevem-se a seguir alguns exemplos concretos dessa impressco.

1. O problema de Buffon i frequentemente tratado em livros de texto sobre Probabilidades e Mitodos Estocasticos. Em livros a este respeito tanto em ingljs como em alemco, o primeiro autor nco encontrou um znico em que transparega a mais pequena dzvida sobre a afirmagco de que “Buffon desejava calcular uma aproximagco a π com a sua experijncia”(esta observagco i, infelizmente, tambim aplicavel ao livro do primeiro autor *Elementare Stochastik*, Springer Spektrum, 2012).

2. Estes autores de livros de texto encontram-se em boa companhia: mesmo em livros sobre Histsria das Probabilidades se afirma, sem citar quaisquer fontes, que Buffon realizou de facto estas experijncias. Eis dois exemplos:

   - “It was originally performed with a needle” ([8], p. 75).
   - “Many investigators (including Buffon) used this result for the experimental determination of π” ([10], p. 120).

Muitos outros livros de Histsria das Probabilidades sco omissos sobre a ligagco de Buffon ‘ aproximagco experimental de π, deixando a questco totalmente em aberto.

De acordo com Bernard Bru, toda esta situagco resulta de um mal-entendido histsrico. As experijncias efectivamente realizadas e descritas por Buffon sobre o Paradoxo de S. Petersburgo terco sido, com o passar do tempo, erradamente extrapoladas como abrangendo *tambim* experijncias relativas ‘ aproximagco de π atravis do problema da agulha. A partir de certa altura estes “factos” foram sendo acriticamente repetidos, sem verificagco das fontes originais.

3. A Internet nco i grande ajuda nesta questco. Nas paginas do Mac Tutor History of Mathematics (`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`), que os autores visitam frequentemente e tjm em elevada consideragco, afirma-se o seguinte sobre Buffon: “His most notable contribution to mathematics was a probability experiment which he carried out calculating π by throwing sticks over his shoulder onto a tiled floor and counting the number of times the sticks fell across the lines between the tiles.”

Ha alguns anos, a situagco descrita pelo Mac Tutor era ainda mais curiosa: afirmava-se que Buffon teria langado, nco paus (“sticks”), mas pces (“white loaves of bread”). Nco i necessaria muita imaginagco para compreender o aparecimento este erro. O termo “baguette” utilizado por Buffon nos seus textos originais foi interpretado, na tradugco para o ingljs, como sendo relativo ao familiar pco francjs de forma alongada (*la baguette de pain*). No entanto, “la baguette” tem varios significados possmveis em francjs, incluindo simplesmente “pau”, que faz consideravelmente mais sentido (e ainda mais se considerarmos que o prsprio Buffon, como acima notado, sugeria substitumlo por uma agulha ou um alfinete sem cabega). Na altura, o primeiro autor notificou o administrador do Mac Tutor a este propssito e, pouco depois, o erro foi corrigido.

4. Nco deixa de ser interessante verificar que este curioso erro de tradugco parece, contudo, ter integrado parte do folclore em torno da hipotitica experijncia de Buffon. Ed Waymire afirma, por exemplo, a propssito de uma generalizagco do resultado de Buffon ([15], p. 550):

- (um colega) "(...) was wondering if I knew what would happen if Buffon had tossed a noodle in place of a needle (actually Buffon tossed baguettes)".

Vale a pena observar que a "experijncia" de Buffon pode ser generalizada em varios sentidos. Eis alguns exemplos:

- O que acontece se o comprimento da agulha for maior do que a distbncia entre as tabuas? Esta questco foi analisada e resolvida por Laplace em [9]. Para abordagens mais recentes, veja-se por exemplo Diaconis [4]).
- Podem substituir-se as agulhas por superfmcies bidimensionais, como por exemplo bases de copos? I possmvel, evidentemente, deduzir fsrmulas para a probabilidade, mas o facto de π ocorrer ou nco na fsrmula depende da geometria da superfmcie. Assim, por exemplo, bases quadradas sco adequadas para calcular aproximagues para π, ao passo que bases circulares nco o sco.
- Como se altera a situagco se substituirmos a agulha por um segmento curvo no plano? A este propssito, consulte-se por exemplo Ramaley [12] ou Waymire [15].

4. conclusco

Em conclusco, podemos afirmar que Buffon formulou e resolveu matematicamente o cilebre problema da agulha. Por outro lado, nco existe qualquer registo histsrico de que Buffon alguma vez tenha realizado experijncias relativas a este problema; pelo contrario, o contexto e o desenvolvimento posteriores sugerem fortemente que tal nunca tenha ocorrido. Apenas no caso, bastante implausmvel, de ser descoberta documentagco ati hoje desconhecida poderia esta hipstese adquirir alguma credibilidade.

Em contrapartida, o problema da agulha de Buffon tem uma extraordinaria importbncia histsrica: foi o primeiro problema de um novo territsrio, a Teoria da Probabilidade Geomitrica, e nesse sentido rasgou horizontes para novas ideias matematicas, que ainda hoje frutificam. Klain e Rota afirmam que o resultado de Buffon i "(...) the theorem leading into the heart of Geometric Probability"([14], p. 3).

Tudo isto confere, assim, uma curiosa dualidade ‘ figura de Buffon. Se, por um lado, parece fora de questco encarar Buffon como um precursor do Mitodo de Monte Carlo *avant la lettre*, o facto de o problema da agulha, que ele formulou e resolveu, marcar de certa forma a fundagco da Probabilidade Geomitrica i razco suficiente para Buffon merecer a nossa admiragco e um lugar na Histsria da Matematica. Recomendamos assim a futuros autores de textos de Probabilidades ou Analise Estocastica que se abstenham de associar Monsieur Buffon ao langamento fmsico de paus, agulhas, pedagos de pco ou objectos semelhantes.

Agradecimentos. Os autores estco muito reconhecidos aos seus colegas Bernard Bru (Paris) e Eberhard Knobloch (Berlim) pela sua ajuda em esclarecer as questues mais delicadas do trabalho aqui descrito.

Referências

[1] L. Badger, Lazzarini's Lucky Approximation of π. Math. Mag. **67** (1994), 2, pp. 83–91.
[2] Fontenelle, B., Mairan, J., Fouchy, J. e Condorcet, J. (eds.), resumo da comunicagco apresentada por Buffon ' Acadimie Royale des Sciences. Histoire de l'Acadimie Royale des Sciences – Annie 1733, 43–45. Paris, Imprimerie Royale, 1735.
[3] G. L. Leclerc de Buffon, Essai d'Arithmétique morale. Histoire naturelle, ginirale er particulihre, Suppliment 4, 46-123, 1777.
[4] P. Diaconis, Buffon's Problem with a Long Needle. J. of Applied Probability **13**, 1976, pp. 614–618.
[5] N. T. Gridgeman, Geometric probability and the number π. Scripta Math. **25** (1960), 183–95.
[6] A. Hall, On an experimental determination of π.
[7] P. Holgate, Buffon's Cycloid. Biometrika **68**, 1981, pp. 712–716.
[8] A. C. King, C. B. Read, Pathways to Probability. 1963.
[9] P.-S. Laplace, Théorie Analytique des Probabilités. 1812. Oeuvres complhtes, tome VII. Paris, Gauthier-Villars, 1886.
[10] L. Maistrov, Probability Theory: A historical sketch. 1974.
[11] Augustus de Morgan, A budget of paradoxes. Cosimo Classics, NY, 2007; 1st edition 1872.
[12] J. F. Ramaley, Buffon's Noodle Problem. American Mathematical Monthly **76**, 1969, pp. 916–918.
[13] H. Riedwyl, Rudolf Wolf's contribution to the Buffon needle problem (an early Monte Carlo experiment) and application of least squares. The American Statistician **44** (1990) 44, 2, 138–139.
[14] D. Klain, G.-C. Rota, Introduction to Geometric Probability. Lezione Lincee, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
[15] Ed Waymire, Buffon noodles. Amer. Math. Monthly **101** (1994), 6, 550–559.

O presente artigo i uma versco revista e ampliada de um outro a publicar em *Newsletter of the European Mathematical Society.*

Ehrhard Behrends
Mathematisches Institut, Freie Universitat Berlin
Arnimallee 6
D-14 195 Berlin
e-mail: `behrends@math.fu-berlin.de`
Jorge Buescu
Dep. Matemática, Faculdade de Ciências
Edifmcio C6, Piso 2
Campo Grande
1749-006 LISBOA
e-mail:`jbuescu@gmail.com`

Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin, Arnimallee 6, D-14 195 Berlin
E-mail address: `behrends@math.fu-berlin.de`

Dep. Matemática, FCUL and CMAF, Portugal
E-mail address: `jbuescu@ptmat.fc.ul.pt`