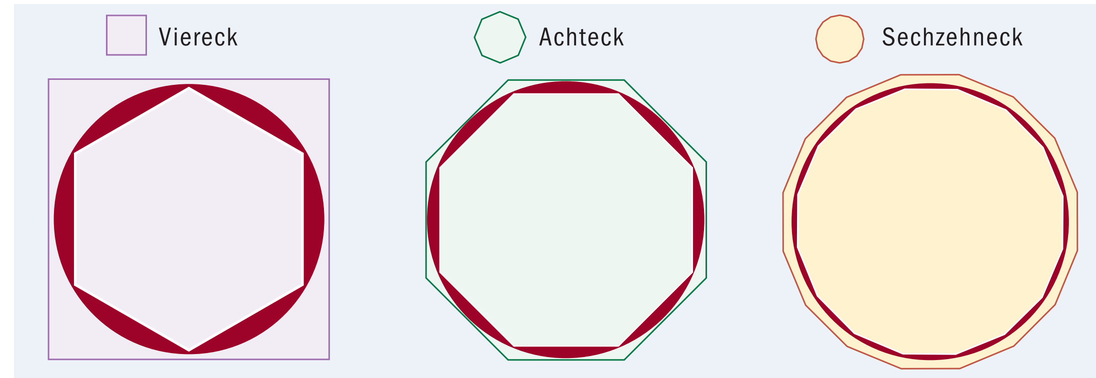
FOTO: ANTHONY CRICKMAY/EMI; GRAPHIK UND MONTAGE: DIE WELT/JUTTA SETZER

…Aerial“ singt Kate Bush ein Lied mit dem Titel „Pi“ und rezitiert darin die ersten 120 Ziffern der Kreiszahl 3,14159265358979323846264338327950 2...

Geometrische Annäherung



Auch wenn man noch gar nichts über Pi weiß, kann man ganz schnell einen ersten Eindruck von der Größenordnung bekommen. Dazu muß man sich nur einen Kreis mit dem Durchmesser zwei vorstellen, der in einem Quadrat liegt und ein Sechseck enthält. Der Umfang des Kreises hat dann mindestens die Länge sechs, denn das ist die Länge des Weges über die Kanten des Sechsecks. Hier sollte man beachten, daß das Sechseck aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut ist, alle Kantenlängen sind also exakt gleich eins.

Ganz einfach überzeugt man sich auch davon, daß der Umfang höchstens acht sein kann, denn das ist die Länge des Umfangs des Quadrats. Folglich liegt die Kreislänge zwischen sechs und acht, die Zahl Pi also – das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser – zwischen drei und vier.

Dieses Konzept kann man ausbauen. Statt Sechs- und Vierecke kann man Sechzig-Ecke oder noch viel kompliziertere Gebilde wählen. Wichtig ist dabei nur, daß man jeweils mit einiger Geduld die erforderlichen Berechnungen durchführt. Auf diese Weise wurde Pi schon vor sehr langer Zeit in einer für alle praktischen Zwecke ausreichenden Genauigkeit bestimmt. Mathematiker wollen aber mehr wissen. Wie kann man denn einige hundert, einige tausend oder gar noch mehr Stellen berechnen? Dafür muß man sich dann tatsächlich etwas Neues einfallen lassen.

Auf diese Weise ist Pi bis zu einer gigantischen Stellenzahl erforscht worden. Das Ergebnis ist erstaunlich, die Ziffern sehen aus, als wenn sie mit einem Zufallsgenerator erzeugt worden wären. Wirklich hat bisher noch keine statistische Analyse eine Regelmäßigkeit aufgedeckt, eine wirkliche Zufallsfolge sähe haargenau so aus.

Apropos Zufall. Schon im 17. Jahrhundert hat der Conte de Buffon – er war ein mathematikinteressierter Landadliger – ein Zufallsexperiment zur näherungsweisen Berechnung von Pi vorgeschlagen.

Dafür braucht man einen Dielenfußboden und ein Stöckchen: Es sollte möglichst kürzer sein als die Dielenbreite. Wenn man das Stöckchen dann fallenläßt, wird es ganz zufällig landen, und es kann sein, daß es auf einer oder auf zwei Dielen zum Liegen kommt. Qualitativ ist klar, daß sehr kurze Stöckchen eher selten zwei Dielen berühren werden. Man kann eine exakte Formel für die Wahrscheinlichkeit angeben, daß dies passiert. Dazu überlegt man sich, daß für das Ergebnis des „zufälligen Fallens“ unseres Stöckchens zwei Aspekte wichtig sind: Wo kommt der Mittelpunkt zum Liegen, und welcher Winkel wird von dem Stöckchen und den Dielen eingeschlossen? Damit wird das Problem auf eine Integrationsaufgabe reduziert, die einem als Ergebnis den Wert „2 mal L durch Pi mal b“ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P liefert; dabei bedeutet „L“ die Länge des Stöckchens und „b“ die Dielenbreite.

Bemerkenswerter Weise taucht die Zahl Pi in dieser Formel auf. Das liegt daran, daß alle möglichen Richtungen des Stöckchens berücksichtigt werden müssen: Diese Richtungen kann man durch Pfeile repräsentieren, die vom Mittelpunkt eines Kreises ausgehen und bis zum Rand reichen.

Der Conte de Buffon hatte nun die Idee, daß man diese Formel auch dazu verwenden kann, Pi „experimentell“ zu bestimmen. Man kennt doch in der Formel die Zahlen „b“ und „L“, und die Wahrscheinlichkeit P für „es werden zwei Dielen getroffen“ kann man durch fleißiges Stöckchenwerfen beliebig genau ermitteln: Passiert das bei 1000 Versuchen 630mal, so setzt man den entsprechenden Erfolgsanteil – also 0,63 – für die Wahrscheinlichkeit ein. Dann ist unsere Formel nur noch nach Pi aufzulösen. Rechts stehen dann nur bekannte Größen, Pi kann also wirklich durch geduldiges Experimentieren gefunden werden.

Leider hat das Verfahren zwei Schönheitsfehler. Erstens trägt das Ergebnis den Makel aller statistischen Methoden, daß man sich nämlich nie hundertprozentig darauf verlassen kann. Typischerweise erhält man nur eine Aussage des Typs: „Mit überwältigender Wahrscheinlichkeit lauten die ersten Ziffern der Dezimalentwicklung von Pi 3,14“. Das ist ein bißchen wenig, um damit wichtige Rechnungen durchzuführen.

Ebenso gravierend ist ein zweiter Schönheitsfehler: Das Verfahren ist bemerkenswert unökonomisch. Auch wenn man sein halbes Leben damit verbringt, Stöckchen auf Dielenfußböden zu werfen, so kann man doch nicht erwarten, mehr als nur einen Einblick in die ersten wenigen Ziffern zu bekommen.

Deswegen ist das Buffon-Experiment für die Jäger der Pi-Ziffern nicht so interessant. Als erstes Indiz der Mathematikgeschichte, daß Pi auch etwas mit dem Zufall zu tun hat, ist es aber trotzdem bemerkenswert.

Auch die hartnäckigsten Pi-Jäger können übrigens nicht hoffen, irgendwann einmal durch geduldiges Rechnen alle Stellen dieser Zahl ermittelt zu haben. Ein tiefer gehendes Studium erfordert neue Begriffe und Methoden. Interessant ist der Ansatz, neue Erkenntnisse dadurch zu gewinnen, daß man den Platz von Pi in der „Hierarchie der Zahlen“ bestimmt. Zahlen können nämlich in eine Rangordnung nach aufsteigender Komplexität gebracht werden, die Liste reicht von den einfachsten Vertretern, den natürlichen Zahlen, bis zu den sogenannten transzendenten Zahlen.

Schon im 18. Jahrhundert konnte der Berliner Mathematiker Johann Lambert zeigen, daß Pi nicht als Bruch ganzer Zahlen geschrieben werden kann, daß also insbesondere die Darstellung als Dezimalzahl niemals abbricht. Sehr viel schwieriger war der Nachweis des Münchners Ferdinand Lindemann vor über hundert Jahren. Er konnte zeigen, daß Pi – erwartungsgemäß – zur kompliziertesten Kategorie gehört. Quasi nebenbei wurde damit ein über 2000 Jahre offenes Problem gelöst, das Problem von der Quadratur des Kreises. Dabei geht es um die Frage, ob man allein unter Verwendung von Zirkel und Lineal einen Kreis in ein exakt flächengleiches Quadrat verwandeln kann. Da man sich aber ohne allzu große Mühe überlegen kann, daß mit Zirkel und Lineal keine einzige transzendente Zahl konstruiert werden kann, ist die Frage aufgrund des Lindemannschen Ergebnisses entschieden: Es geht nicht. Die Quadratur des Kreises ist grundsätzlich möglich.

Doch die Pi-Forschung geht weiter. Die Mathematiker würden insbesondere sehr gern wissen, ob, wie es den Anschein hat, die Ziffern von Pi tatsächlich so eine Zufallsfolge sind. Und warum, wenn es wirklich so sein sollte. Die Regellosigkeit in der Ziffernfolge macht es auch schwierig, sie auswendig zu lernen. Doch damit sind wir wieder bei den Fans: Als Aufnahmeritual in einen Pi-Klub muß man einige Dutzend Stellen von Pi fehlerfrei aufsagen können. Der Rekord im Memorieren liegt bei stolzen 40 000 Stellen und wird von dem Japaner Hideaki Tomoyori gehalten.

Kate Bush sollte indes noch einmal in sich gehen, bevor sie sich bei einem Pi-Fanklub bewirbt. In ihrem Lied ist schon die vierundfünfzigste Nachkommastelle falsch; und irgendwann später fehlen unvermittelt 22 Stellen der Zahl Pi.

Weitere Informationen im Web:
http://pi-day.wikiverse.org/
www.pi-world-ranking-list.com/
www.joyofpi.com/pilinks.html
www.albanyconsort.com/pi/

In den Proportionen des berühmten Castel del Monte in Apulien ist die Zahl verschlüsselt. Es wurde von König Friedrich II. gebaut FOTO: MAURITIUS

Die Brüder Chudnovsky

Die in New York lebenden Mathematiker-Brüder Gregory und David Chudnovsky waren die ersten, die eine Milliarde Dezimalstellen von Pi berechneten. Dies gelang ihnen im Jahr 1989. Fünf Jahre später legten sie dann die ersten vier Milliarden Ziffern von Pi vor. Auch das war damals Weltrekord. Die aus der Ukraine stammenden Mathematiker nutzen zur Berechnung von Pi selber entwickelte Formeln, die den Konzepten von Ramanujan ähnlich sind. Die Leidenschaft, mit der sich die Chudnovsky-Brüder seit Jahrzehnten der Zahl Pi widmen, entspringt ihrer Vermutung, daß in der Ziffernfolge von Pi bislang unerkannt gebliebene Strukturen verborgen sind. Bis heute ist nämlich unklar, ob die Folge der Dezimalziffern von Pi rein zufällig ist oder vielleicht doch irgendwelchen höchst subtilen Gesetzmäßigkeiten gehorcht. Manchen Wissenschaftlern widerstrebt nämlich der Gedanke, daß eine für die Naturwissenschaften so zentrale Zahl wie Pi eine spröde Zufallsfolge von Ziffern bergen soll. Immer wieder wurde von Esoterikern behauptet, daß in der Zahl Pi geheime Botschaften verschlüsselt sind. Doch von wem sollten diese Botschaften denn stammen? Etwa von Gott?

Mysteriös ist auf jeden Fall das Leben der Chudnovsky-Brüder. Sie studierten und promovierten am Mathematischen Institut der Ukrainischen Akademie in Kiew und flüchteten 1977 unter bis heute nicht bekannten Umständen aus der Sowjetunion in die USA.

Das Pi-Genie Ramanujan

Srinivasan Ramanujan wurde 1887 in Südindien geboren. Aus einer alten Formelsammlung brachte er sich selbst Mathematik bei. Sein Interesse daran war so ausschließlich, daß er den Schulabschluß nicht bestand. Er war bitterarm, arbeitete als Buchhalter im Hafen von Madras, widmete aber fast alle Zeit der Mathematik. Im Alter von 26 Jahren schrieb er dem englischen Mathematiker G. H. Hardy einen Brief voller Ideen. Hardy holte ihn 1914 nach Cambrigde. Ramanujan litt dort unter dem Essen und dem Klima. Er wurde sehr krank. Dennoch schrieb er 21 bahnbrechende Arbeiten – auch die berühmte Kettenbruchentwicklung von Pi, die schon nach zehn Summationen 88 Nachkommastellen liefert. Gleichungen waren für ihn „Gedanken Gottes“. 1919 kehrte er nach Indien zurück, wo er 1920 starb.

FOTO: PASSFOTO AUS DEM JAHRE 1918

Fand die Pi-Formel: S. Ramanujan

Ramanujan-Formel

$$\frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot (1103 + 26390\,n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}} = \frac{1}{\pi}.$$

In der Sinuskurve versteckt

Die Welt ist voll von Schwingungen: Licht-, Radio- und Wasserwellen, schwingende Saiten und Wolkenkratzer ... Viele sind periodisch, das heißt ihr Verlauf wiederholt sich nach einer gewissen Zeit. Bei manchen – etwa bei schwingenden Brücken – braucht eine vollständige Schwingung einige Sekunden, bei anderen geht das unglaublich schnell. Es ist bemerkenswert, daß man wirklich alle Schwingungen durch geeignetes Skalieren und Zusammensetzen aus einem einzigen Bausteintyp aufbauen kann, nämlich aus Sinusschwingungen.

Sinusschwingungen kann man übrigens hören: Wenn man pfeift, ist der entstehende Ton nahezu perfekt eine Sinusschwingung. Aber auch das Pi-Lied von Kate Bush ist letztlich die Summe sehr vieler Sinusschwingungen. Die Theorie des Zusammensetzens von Sinusschwingungen, die Fourieranalyse, ist allen Elektrotechnikern bekannt und bereits 200 Jahre alt. Wenn man für eine konkrete Schwingung das „Rezept“ berechnet, also die Anteile, in welchen Mengen die „Zutaten“ – also Sinusschwingungen mit unterschiedlicher Frequenz – gewählt werden müssen, so taucht in diesen Formeln zwangsläufig die Zahl Pi auf. Der Grund: Die Periode einer Sinusschwingung ist genau zweimal Pi. Deshalb kann man kaum ein Buch für Techniker oder Ingenieure finden, in dem nicht auf fast jeder Seite Pi zu finden ist.