Titel:
„Mathematics inside“

Autor: Ehrhard Behrends, FU Berlin

Es geht nicht anders, lieber Törleß, die Mathematik ist eine ganze
Welt für sich, und man muß reichlich lange in ihr gelebt haben, um
alles zu fühlen, was in ihr notwendig ist.

(aus: „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß“ von Robert Musil.)

Die Welt verdankt dem Geheimbund der Pythagoräer, der seine Blütezeit um 550 vor unserer Zeitrechnung in Süditalien hatte, eine Vision: Die Welt kann mit Hilfe von Zahlen geordnet werden. Dieses Erklärungsprinzip wurde in den verschiedensten Lebensbereichen eingesetzt, das Bildungsgesetz für Tonleitern wurde damit genauso erklärt wie die Harmonie der Sphären, auf denen sich die damals bekannten Himmelskörper bewegten.

Um diese Vision wurde es still, denn bis in die Mitte des vorigen Jahrtausends war die Philosophie des Aristoteles tonangebend, die das pythagoräische „Alles ist Zahl“ nicht vorsah. Der eigentliche Durchbruch der Idee, die Welt mit Hilfe der Mathematik besser beschreiben zu können, geht auf Galilei (1564 bis 1642) zurück. Galilei hatte sich vorgenommen, die mit den damaligen physikalischen Kenntnissen nicht erklärbaren Paradoxien des kopernikanischen Weltbildes durch eine neue Physik zu vermeiden. Wenn die Erde wirklich rotiert und um die Sonne kreist, wie ist es dann zu erklären, dass wir von der Rotation nicht ins All geschleudert werden „wie Wassertropfen von einem rotierenden Rad“, und warum gibt es keinen durch die Drehung hervorgerufenen Gegenwind? Die Wissenschaft war von einer befriedigenden Lösung noch weit entfernt, die grundlegende Bedeutung von Begriffen wie „Masse“, „Kraft“, „Impuls“ und „Beschleunigung“ wurden erst in einer komplizierten und langwierigen Entwicklung im 17. Jahrhundert gefunden. Zum Abschluss wurden diese Bemühungen durch Newton in seinen „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ (1687) gebracht, einem Werk, das allgemein als Beginn der exakten Naturwissenschaften angesehen wird. Darin wird Galileis Motto „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ systematisch am Beispiel der Mechanik umgesetzt.

Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, dem Universum,
das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen,
wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben
vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der
Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und
andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein
einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen
Labyrinth herum.

(Galileo Galilei, „Il Saggiatore“, 1623)

Newtons „Principia“ haben einen streng deduktiven Aufbau, Vorbild waren die „Elemente der Geometrie“ des Euklid. Am Anfang stehen Grundbegriffe wie „Kraft“ und „Masse“, in den „Elementen“ ging es um „Punkte“ und „Geraden“. Dann folgen die „Axiome“: Newtons Gesetze („Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“) entsprechen geometrischen Forderungen wie etwa „Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade“. Und dann kann die Entwicklung der Theorie beginnen. Es ist faszinierend (und auch für heutige Mathematiker oft schwierig) zu sehen, wie Newton auf einem Fundament, das auf wenigen Seiten formuliert werden kann, aufbaut und praktisch alle damals bekannten Phänomene erklärt, die mit der Bewegung von Massen zu tun haben. Seine Theorie ist auf Himmelskörper genauso anwendbar wie auf fliegende Kanonenkugeln, und die Gezeiten finden nun ebenso ihre Erklärung wie die Abplattung der Erde an den Polen.

Quasi nebenbei entwickelte Newton die mathematischen Werkzeuge, die er für seine Untersuchungen brauchte. So entstand ein wichtiger neuer Zweig der Mathematik, die „Infinitesimalrechnung". Das ist die Theorie des Differenzierens und Integrierens, der Name weist darauf hin, dass es um „unendlich kleine Größen" geht. (Übrigens hatte Leibniz ähnliche Überlegungen unabhängig von Newton in Deutschland angestellt. Es gab einen erbittert geführten Prioritätenstreit.)

In den Jahrhunderten nach Newton gab es immer weitere spektakuläre Erfolge, das „Buch der Natur" dadurch zu entschlüsseln, dass man die mathematischen Zeichen richtig interpretierte. Die bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts gehegte Erwartung, dass man wirklich alle Phänomene auf mechanische Wechselwirkung zurückführen könnte, dass also die Welt so wie ein großes und kompliziertes Uhrwerk funktionieren würde, hat sich allerdings nicht erfüllt. Heute weiß man, dass viel kompliziertere „mathematische Buchstaben" zur Beschreibung erforderlich sind, als man sich zu Galileis Zeiten vorstellen konnte.

So benötigt man zum Beispiel in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie anstelle der euklidischen „Alltagsgeometrie" neue nichteuklidische Geometrien, um Vorgänge angemessen beschreiben zu können, bei denen Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit auftreten oder bei denen es um kosmische Dimensionen geht.

Auch zum Verständnis der Welt des Mikrokosmos musste man die Alltagserfahrung über Bord werfen. Kausalität, wie wir so gewohnt sind, gibt es dort nicht. Einzelne Teilchen wie etwa ein Photon verhalten sich völlig unvorhersagbar. Beherrschbar sind allerdings Wahrscheinlichkeiten, eine typische Aussage könnte sein: „Dieses Photon wird mit 73 Prozent Wahrscheinlichkeit an der Glasplatte gespiegelt werden und mit 27 Prozent Wahrscheinlichkeit durch sie hindurchgehen." Erst durch die Überlagerung einer unvorstellbar großen Zahl zufälliger Prozesse kann so etwas wie eine Illusion der Kausalität entstehen.

Mathematik hat sich so im Laufe der Jahrhunderte zu einem zusätzlichen „Sinn" für die Erfassung der Welt entwickelt, zu einer Lupe, mit der wir Dinge sehen, zu denen wir sonst keinen Zugang hätten.

Soviel zur Bedeutung der Mathematik bei den Bemühungen, „zu erkennen, was die Welt, im Innersten zusammenhält". Darüber sollte man nicht aus den Augen verlieren, dass auch viele Bereiche unseres Alltagslebens „mathematisch durchdrungen" sind.

Von der Bedeutung von Optimierungsverfahren für Ingenieure oder die Wichtigkeit statistischer Verfahren in den verschiedensten Bereichen soll dabei nicht die Rede sein. Das ist seit über hundert Jahren etabliert. Interessanter sind Entwicklungen der letzten Jahrzehnte, dazu sollen nun einige Beispiele vorgestellt werden.

Ein fast schon klassischer Gebrauchsgegenstand, der das Etikett „mathematics inside" tragen sollte, ist der *CD-Player*. Mathematik kommt da gleich mehrfach zum Einsatz. Zunächst geht es darum, ein eigentlich analoges Signal – die Schallwellen einer Aufzeichnung unseres Lieblingskonzerts – zu digitalisieren, d.h., es in eine lange Folge von Nullen und Einsen zu verwandeln. Möglich ist das eigentlich nur, weil unsere Hörfähigkeiten beschränkt sind: Für die meisten von uns sind Frequenzen über 16.000 Hertz unhörbar. Das Lieblingskonzert wird deswegen zunächst durch einen „Filter" geschickt, in dem hohe Frequenzen, falls vorhanden, abgeschnitten werden. Dann kann einige tausend Male pro Sekunde „abgetastet" werden: Wie weit ist die Lautsprechermembran zu den entsprechenden Zeitpunkten ausgelenkt, und welche Darstellung aus Nullen und Einsen hat diese Auslenkung? Das so genannte „Abtasttheorem" garantiert, dass keine für uns hörbare Information verloren geht. Schwieriger ist der nächste Schritt, bei dem die lange 0-1-Folge auf der CD untergebracht werden soll. Sie soll in eine Abfolge von winzigen Erhebungen und Vertiefungen übersetzt werden, die auf einer langen spiralförmigen Bahn – ähnlich wie die Rillen auf einer Schallplatte – eingeätzt werden. Theoretisch wäre damit unser Lieblingsstück verewigt, doch könnten wir so eine CD nicht bezahlen. Denn damit die Nullen und Einsen wieder in die richtige Musik verwandelt werden können, darf sich in der gigantischen Zahl von Erhöhungen und Vertiefungen auf der „CD-Rille" nicht der kleinste Fehler eingeschlichen haben. Das ist mit vertretbarem technischen Aufwand nicht machbar, und deswegen werden mathematische Überlegungen noch einmal notwendig. Diesmal wird die „Codierungstheorie" wichtig. In diesem mathematischen Teilgebiet untersucht man, wie Nachrichten – z.B. eine 0-1-Folge - so mit Zusatzinformationen aufgefüllt werden können, dass der Inhalt bei einer Übertragung auch dann fehlerfrei rekonstruiert werden kann, wenn einzelne Zeichen gelegentlich verfälscht werden. Diese „fehlerkorrigierenden Codes" spielen bei der CD eine wichtige Rolle. Sie bewirken, dass der Hörgenuss nicht vermindert wird, wenn bei der Herstellung versehentlich einige Staubkörnchen mit eingebrannt werden.

Ein weiteres Beispiel, bei dem Mathematik in den Alltag hineinreicht, sind moderne Entwicklungen in der *Kryptographie*, also der Wissenschaft vom Ver- und Entschlüsseln. Ausgangspunkt ist eine lange bekannte Tatsache aus der Zahlentheorie: Wenn man sich irgendeine Primzahl p aussucht (also eine Zahl p, die nur 1 und p als Teiler hat), so lässt für jede Zahl n zwischen 1 und p die Zahl n^p (also n mal n ... mal n, mit insgesamt p Faktoren) beim Teilen durch p den Rest n. Als Beispiel betrachten wir die Primzahl p=5 und n=3. Das Produkt aus 5 Dreien ergibt 243, und beim Teilen durch 5 bleibt wirklich der Rest 3. Durch eine Zusatzüberlegung ergab sich daraus vor wenigen Jahrzehnten eine spektakuläre Neuerung für die Kryptographie. Erstmals war es nämlich nicht mehr nötig, die Informationen, die man zum Verschlüsseln braucht, geheim zu halten. Im Prinzip kann jeder mit dieser „public key cryptography" eine Nachricht so in eine scheinbar sinnlose Buchstabenfolge verwandeln, dass das Original nur von den berechtigten Empfängern wiederhergestellt werden kann. Quasi täglich kommen wir bei Kontobewegungen über den heimischen PC oder bei Zahlungen im Internet mit diesen auf Primzahlen beruhenden Verschlüsselungen in Berührung.
Das Verfahren beruht auf der Tatsache, dass es wohl nie eine Möglichkeit geben wird, aus einem Produkt von zwei großen Primzahlen die Faktoren zu rekonstruieren. Dass 21 das Produkt aus 3 und 7 ist, kann man sofort sehen. Um zu erkennen, dass 1201 und 3457 die Faktoren von 4151857 sind, brauchen die meisten schon Computerhilfe, aber bei Faktoren von der Größenordnung von einigen hundert Stellen, wie sie für die Kryptographie eingesetzt werden, würde das auch mit elektronischer Unterstützung viele Milliarden Jahre dauern.

Als letztes Beispiel soll von aktuellen Entwicklungen in der *Finanzmathematik* die Rede sein. Als Erstes fallen einem dazu natürlich Rechnungen im Zusammenhang mit Zinsen und Zinseszinsen ein, ein Bereich, mit dem alle von uns zu tun haben, wenn es um Bauspartilgungen oder Lebensversicherungspolicen geht. Obwohl es da überraschende Phänomene gibt – die Werte wachsen weit schneller, als man es naiv erwarten würde – wurde das Gebiet von der Mehrzahl der Mathematiker bis vor wenigen Jahrzehnten nicht als besonders spannend eingeschätzt.
Das änderte sich schlagartig, als es im Jahr 1997 einen Nobelpreis für die Herren Black, Scholes und Merton gab, die in den Siebzigern recht komplizierte mathematische Methoden für die Bewertung von Optionen eingesetzt hatten.

Eine Option ist ein Vertrag mit der Bank zur Risikoabsicherung. Zum Beispiel kann man sich von der Bank garantieren lassen, dass man in genau einem Jahr eine Million Euro zu einem festgesetzten Wechselkurs in Dollar umtauschen kann. Das Risiko von Kursschwankungen ist dann ausgeschaltet; das liegt allein bei der Bank, die einem dafür die entsprechende Option verkauft hat. Mittlerweile gibt es Optionstypen wie Sand am Meer, und es ist eine anspruchsvolle mathematische Aufgabe, den jeweils angemessenen Preis zu ermitteln und festzulegen, wie das eingenommene Geld (der Preis für die Option) als Festanlage bzw. zum Kauf von Wertpapieren aufgeteilt werden soll.
Das Berufsbild der Mathematiker hat durch diese Entwicklung eine erfreuliche Ergänzung erfahren, die großen Banken beschäftigen Hunderte von Spezialisten, um das Risiko bei Optionsgeschäften so weit wie möglich zu bändigen.

Es wäre nun allerdings ein Irrtum, wenn man aufgrund dieser aktuellen Beispiele zu dem Schluss kommen würde, dass es Mathematikern nur darum geht, immer neue und immer effektivere Verfahren im Interesse des technischen Fortschritts zu ersinnen. Nein, viele – vielleicht sogar die Mehrheit – beschäftigen sich mit der Erforschung des „mathematischen Kontinents“, ohne dabei an verwertbare Anwendungen zu denken. Hier eine kleine Auswahl von Fragestellungen, die „theoretische“ Mathematiker interessant finden:

Gibt es unendlich viele Primzahlen? (Ja: bekannt seit 2500 Jahren.) Kann man die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ mit positiven ganzzahligen x, y, z und n lösen, wenn n größer als Zwei ist? (Das ist das Fermatproblem. Die Antwort ist „Nein“, das Ergebnis stammt von Andrew Wiles und ist knappe zehn Jahre alt.) Ist die Poincarévermutung richtig? (Sie besagt, vereinfacht ausgedrückt, dass man einen Katalog aller Typen von „Räumen“ erstellen kann. Gelöst wurde das im August 2006 von dem russischen Mathematiker Perelman.) Ist P=NP? (Für Laien kann man die Frage in „Gibt es wirklich schwierige Probleme?“ übersetzen. Das ist noch offen, für eine Lösung sind 1.000.000 Dollar ausgesetzt. Sie hängt direkt mit dem oben beschriebenen Kryptographieverfahren zusammen: Wäre P=NP, so hätten Kryptographen einige schlaflose Nächte.)

Nach der Diskussion des Galilei-Zitats „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ und der Beschreibung einiger aktueller Forschungsthemen soll noch kurz auf das „warum?“ eingegangen werden. Wie kommt es, dass man Mathematik einsetzen kann, um die Welt besser zu verstehen? Diese philosophische Frage wäre sicher einen eigenen Artikel wert: Ist die Anwendbarkeit nur eine Illusion? Ist die Welt nach mathematischen Prinzipien erschaffen worden? Beruht alles nur auf einer pragmatischen Vereinbarung der jeweils tonangebenden Wissenschaftlergemeinde? Hier muss der Hinweis genügen, dass die Frage seit einigen Jahrtausenden intensiv diskutiert wird, dass aber bis heute keine Antwort gefunden wurde, die von der Mehrheit der Mathematiker akzeptiert werden würde.

Stichpunkte zum Autor

Professor Ehrhard Behrends lehrt Mathematik an der Freien Universität Berlin. Seine Spezialgebiete sind Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie. Seit mehren Jahren hat er sich auch für eine bessere Vermittlung der Mathematik für ein interessiertes Laienpublikum eingesetzt. So hat er im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Internetseite www.mathematik.de aufgebaut und mehrere populäre Bücher zur Mathematik geschrieben

und herausgegeben. Kürzlich erschien sein Buch „Fünf Minuten Mathematik“, das aus einer gleichnamigen Kolumne hervorgegangen ist, die von 2003 bis 2005 wöchentlich in der WELT erschien. Es enthält 100 Beiträge zu verschiedenen Bereichen der Mathematik, die hier behandelten Themen werden dort etwas ausführlicher diskutiert.