Rainers Problem

Ehrhard Behrends, Februar 2015

1. Das Problem

Rainer fragt auf der Sitzung vom 24. 2. 15: Kann man positive Zahlen x, y, z, w so finden, dass

$$x + y + z + w = 7.11, \ x \cdot y \cdot z \cdot w = 7.11 \quad ?$$

Die Antwort:

- Ja, und es gibt unendlich viele Lösungen. Die Begründung findet man nachstehend.
- Verlangt man zusätzlich, dass x, y, z, w „einfache" Zahlen sein sollen, also höchstens zwei Stellen nach dem Komma haben dürfen, so gibt es (bis auf Umsortierungen) nur eine einzige Lösung:

  $$x = 1.2, \ y = 1.25, \ z = 1.5, \ w = 3.16.$$

  Auch das ist weiter unten genauer ausgeführt.

2. Erinnerung: Quadratische Gleichungen

Alle Schüler dieser Welt kennen die Formel, kaum einer liebt sie: Wenn p und q vorgegeben sind und man eine Zahl x sucht, für die $x^2 + px + q = 0$ gilt, so findet man sogar zwei Lösungen durch die Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Das ist die berühmte so genannte p-q-*Formel*.

Das gilt *immer*, wenn man die Wurzeldefinition auch auf negative Zahlen ausdehnt. (Dazu braucht man allerdings komplexe Zahlen, und das wird in der Schule heute nicht mehr gemacht). Wenn man bei der „klassischen" Wurzeldefinition bleiben möchte, muss der Ausdruck unter der Wurzel positiv sein, es muss also $p^2/4 - q \geq 0$ (d.h. $p^2 \geq 4q$) gelten.

3. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Nun sollen positive Zahlen a, b vorgegeben sein, und wir suchen positive x, y mit

$$x + y = a \text{ und } x \cdot y = b\,.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf ($y = a - x$) und setzen das in die zweite ein: $x(a - x) = b$. Das bedeutet $ax - x^2 = b$ oder (nach umsortieren) $x^2 - ax + b = 0$. Die Lösungen können wir nach der p-q-Formel angeben, wenn wir dort $p = -a$ und $q = b$ einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel soll positiv sein: Es muss also $a^2/4 - b \geq 0$, d.h. $a^2 \geq 4b$ gelten. Wenn das der Fall ist, kann man $x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ setzen, und y ist dann durch

$$y = a - x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

gegeben.

4. Rainers Problem: die Lösung

Angenommen, wir haben schon einmal versuchsweise zwei Zahlen z, w für Rainer ausgesucht, und x, y sollen noch geschickt dazu bestimmt werden. Ein Beispiel: $z = 2$ und $w = 2$. Für x, y muss dann

$$x + y + 2 + 2 = 7.11,\ x \cdot y \cdot 2 \cdot 2 = 7.11$$

gelten, d.h.

$$x + y = 7.11 - 4,\ x \cdot y = 7.11/4.$$

Wenn wir zur Abkürzung $a := 7.11 - 4 = 3.11$ und $b = 7.11/4 = 1.7775$ setzen, haben wir also das Problem $x + y = a,\ x \cdot y = b$ aus dem vorigen Abschnitt vor uns. Hier ist wirklich $a^2 \geq 4b$, wir finden also positive Lösungen mit der oben angegeben Formel: $x = 3.11/2 - \sqrt{(3.11/2)^2 - 1.7775} = 1.555 - 0.800328.. = 0.754671..$ und $y = 1.555 + 0.800328.. = 2.355328..$

Zusammen: Wir haben die Lösung

$$x = 0.754671..,\ y = 2.355328.., z = 2,\ w = 2$$

erhalten.

Hier noch ein weiteres Beispiel: $z = 1$ und $w = 3$. Das führt auf $x + y = 7.11 - 4 = 3.11 = a$ und $x \cdot y = 7.11/3 = 2.37 = b$. Wieder ist $a^2 \geq 4b$, und das führt uns zu einer neuen Lösung:

$$x = 1.335853..,\ y = 1.774146..,\ z = 1, w = 3.$$

Und auf diese Weise kann man beliebig viele Lösungen finden; man kann irgendwelche z, w aussuchen, die nicht zu weit von der 2 entfernt sind.

Alle z, w kann man aber nicht vorgeben, es soll ja die Bedingung $a^2 \geq 4b$ erfüllt sein. Wenn wir etwa mit $z = 3,\ w = 4$ starten, müsste $x + y = 0.11 = a$ und $x \cdot y = 7.11/12 = b$ gelten. Diesmal ist aber *nicht* $a^2 \geq 4b$, d.h., es gibt keine positiven Lösungen x, y zu diesen z, w.

5. „Einfache“ Lösungen

Wie kann man Zahlen x, y, z, w mit höchstens zwei Stellen nach dem Komma finden, so dass

$$x + y + z + w = 7.11,\ x \cdot y \cdot z \cdot w = 7.11 \quad ?$$

Ein Trick hilft weiter. Wir multiplizieren die Zahlen jeweils mit 100, dann werden sie ganze Zahlen. Genauer: Wir setzen

$$X := 100 \cdot x,\ Y := 100 \cdot y,\ Z := 100 \cdot z,\ W := 100 \cdot w$$

und jetzt sind *ganzzahlige* X, Y, Z, W so zu finden, dass

$$X + Y + Z + W = 711,\ X \cdot Y \cdot Z \cdot W = 711000000\,.$$

Die Zahl 711000000 zerfällt in die Primfaktoren $2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 79$, und aus denen müssen wegen $X \cdot Y \cdot Z \cdot W = 711000000$ die Zahlen X, Y, Z, W zusammengesetzt sein. Dafür sind eine Menge Möglichkeiten durchzuprobieren, das habe ich meinem Computer anvertraut. Und der hat als einzige Lösung (bis auf Vertauschung der Reihenfolge) die Zahlen

$$X = 120,\ Y = 125,\ Z = 150,\ W = 316$$

gefunden. Wir teilen diese Zahlen noch durch 100 und kommen so zu

$$x = 1.2,\ y = 1.25,\ z = 1.5,\ w = 3.16.$$

Und für diese x, y, z, w gilt wirklich

$$x + y + z + w = 7.11,\ x \cdot y \cdot z \cdot w = 7.11\ .$$