Eine neue zauberhafte Invariante

Helmut Lohan hat am 8. 9. 15 den folgenden Trick bei den Zauberfreunden vorgeführt:

- In einer Reihe liegen fünf Zahlenkarten (Werte von 1 bis 5, Bild nach oben, Reihenfolge durcheinander).
- Alle Karten werden umgedreht, der Zauberer wendet sich ab.
- Beliebig oft kann ein Zuschauer nun die folgende Operation durchführen: „Suche Dir zwei benachbarte Karten, vertausche die Reihenfolge und drehe sie um.[1]“
- Finale: Der Zuschauer soll die Karten an den Positionen zwei und vier umdrehen. Dann soll er alle Karten, die bildunten liegen, beiseite legen und von den restlichen auch noch die mit dem kleineren Wert.
- Der Zauberer – immer noch abgewendet – kann diese Karte richtig nennen.

Der mathematische Hintergrund

1. Invarianten

Invarianten spielen in der Zauberei eine große Rolle. Man braucht:

- Eine Eigenschaft E. Zum Beispiel: In diesem Kartenstapel liegt Herz Ass zwei weiter als Pik Sieben. Das muss allerdings zyklisch interpretiert werden (d.h., es wird vorne weiter gezählt, wenn es hinten keine Karten mehr gibt).
- Eine Aktion A. Zum Beispiel: Abheben an beliebiger Stelle des Stapels.
- Ein Ergebnis: Wenn der Kartenstapel die Eigenschaft E hat, so wird er auch nach der Aktion A diese Eigenschaft haben. Im Beispiel ist das – wie leicht zu sehen – erfüllt.

Offensichtlich bleibt dann E auch dann erhalten, wenn man A nicht nur einmal, sondern beliebig oft durchführen lässt. Die Idee im gewählten Beispiel ist die Grundlage vieler Tricks („Leitkarte“), für ein weiteres Beispiel siehe meinen Artikel zum Hummer-Zaubertrick in der *Magie 10/2015.*

2. Die neue Invariante

Man braucht zwei Sorten von Karten, die jeweils auf der einen Seite („Bildseite“) beschriftet und auf der anderen Seite neutral sind und zwei „Felder“. Zur

[1] Bildseite unten, dann Bildseite oben, und umgekehrt.

Illustration (die noch nicht Zaubertrick-tauglich ist) werden wir (etwa 10 bis 15) rote und schwarze Spielkarten nehmen, und die „Felder“ sind ein blauer und ein grüner DinA3-Bogen, die nebeneinander auf dem Tisch liegen.

- Die Vorbereitung: Es werden – hier bei der Illustration noch vom Zauberer – die roten Karten auf den blauen Bogen und die schwarzen Karten auf den grünen Bogen gelegt, jeweils bildoben. So, dass man alle sehen kann, also nicht überlappend.

- Alle Karten werden umgedreht, liegen also nun bildunten. (Immer noch nebeneinander.)

- Die Eigenschaft E: „Wenn man die Karten, die auf dem blauen Bogen liegen, umdreht, so zeigen – betrachtet man die Karten auf *beiden* Bögen – genau die roten Karten nach oben.“ Die Ausgangskonfiguration hat offensichtlich diese Eigenschaft.

- Die Aktion A: „Wähle eine beliebige Karte vom blauen Bogen und lege sie umgedreht auf den grünen. Oder umgekehrt: vom grünen nehmen, umdrehen und auf den blauen legen.“

Dann ist E wirklich eine Invariante bezüglich der Aktion E. D.h., auch wenn A beliebig oft durchgeführt wurde, bleibt die Eigenschaft E erhalten: Wenn die Karten auf dem blauen Bogen umgedreht werden, sieht man (jetzt beide Bögen berücksichtigend) die Bildseiten der roten und die Rücken der schwarzen Karten. Dabei werden einige rote Karten in den grünen Bereich gewandert sein.

3. Die Begründung

Es soll eine Konstellation mit E vorliegen. Nun die Aktion A, der Zuschauer wählt also eine Karte K. Unser Ziel: E gilt nach A immer noch.

Es gelte zum Beispiel: K *ist rot und liegt auf blau.* Weil E erfüllt ist und K auf blau liegt, muss K vor der Aktion A bildunten liegen. Nach A liegt K bildoben im grünen Feld, es gilt also wieder E.

Die fehlenden Fälle (K ist rot und liegt auf grün; K ist schwarz und liegt auf blau; K ist schwarz und liegt auf grün) können genauso analysiert werden.

Wer möchte, kann die Aktion A abschwächen. Dann bleibt die Invarianzeigenschaft natürlich erhalten. Statt A könnte man etwa A' vorschreiben: „Suche Dir eine Karte aus dem blauen und eine aus dem grünen Feld. Vertausche sie und drehe sie dabei gleichzeitig um“. Das ist nichts weiter als eine zweimalige A-Aktion, und deswegen ist nichts Neues zu zeigen. Auf diese Weise bleibt die Anzahl der Karten auf dem blauen Feld und auf dem grünen Feld erhalten.

Es folgen nun Vorschäge, wie man das Grundprinzip etwas verschleiert.

3. Vorschläge zur Präsentation

1. Man verwendet Spielkarten und lässt – jeweils bildoben und nebeneinander, und durchaus auch von einem Zuschauer – einige auf den blauen und einige auf den grünen Bogen legen. Der Zauberer entscheidet sich heimlich für irgendeine Karte auf dem blauen Bogen und überlegt sich eine oder mehrere Anweisungen, durch die genau diese Karte aus den auf blau liegenden ausgesondert werden könnte. („Entferne alle Bildkarten", „Nimm von den restlichen diejenige mit dem größten Zahlenwert" o.ä.) Dann geht es los: Beliebig oft die Aktion A, dabei sollten ungefähr gleich oft Karten aus dem blauen und grünen Bereich drankommen. Es folgen die Anweisungen, und dann nennt der Zauberer richtig die übrig gebliebene Karte.

1'. Im nächsten Durchgang kann man die Rollen von „blau" und „grün" vertauschen. Man sucht sich also eine Karte aus der grünen Abteilung und lässt im Finalschritt die Karten auf dem grünen Feld umdrehen.

2''. Falls keine blauen und grünen Bögen zur Hand sind, ist das leicht auszugleichen. Man interpretiert z.B. „Liegt auf blauem/grünem Bogen" als „Liegt links/rechts vom Zuschauer auf dem Tisch".

2. Wie 1., aber statt Standard-Spielkarten werden Karten mit Symbolen oder Bildern verwendet.

3. Wie 1., aber der Zauberer rechnet heimlich die Augensumme der Karten auf dem blauen Bogen aus. Am Schluss sollen die Zuschauer die Summe der bildoben liegenden Karten bilden und sich auf diese Zahl konzentrieren. Die wird auf magische Weise an den Zauberer übertragen.

4. Der Zuschauer sucht sich eine beliebige Zahl n und dann n Karten aus. Die werden bildoben nebeneinander auf
den Tisch gelegt (und später umgedreht). „Liegt auf dem blauen Bogen" wird ersetzt durch „Liegt an Position 1 oder 3 oder ... (ungerade Position) und „Liegt auf dem grünen Bogen" wird ersetzt durch „Liegt an Position 2 oder 4 oder ... (gerade Position). Nun muss der Zauberer heimlich eine Karte an ungerader Position wählen und sich Anweisungen ausdenken, durch die er die aussondern kann. Und A wird hier so präzisiert: „Vertausche und drehe zwei benachbarte Karten". Beim Finale werden jetzt die Karten an ungeraden Positionen umgedreht[2].
Für $n = 5$ ist das Helmuts Originalversion. Die Anweisung entspricht einem Spezialfall von A' und ist deswegen zulässig[3]. Der Vorteil: Keiner wird ahnen, dass ausgerechnet die Karten an ungeraden Positionen wichtig werden.

[2]Natürlich kann hier auch überall „ungerade" durch „gerade" ersetzen.

[3]Helmut hätte auch sagen können: Vertauschen und umdrehen nicht nur für die Paare an den Positionen $12, 23, 34, 45$, sondern zusätzlich auch an $14, 25$.

5. Wie vorstehend, aber die Anzahl ist gerade und die Karten werden zu einem „Kreis“ (etwa ein Sechseck aus sechs Karten) gelegt. An jede zweite Position kommt ein Centstück, das entspricht „Karte auf blauem Bogen“. Dann wird beliebig oft die Aktion benachbarte-vertauschen-und-umdrehen durchgeführt, und zum Finale werden noch die Karten an den durch ein Centstück markierten Positionen gedreht. Man könnte auch ein Sechseck aus großen Kreisen vorbereiten, wobei sich die Farben der Kreise (blau-grün) abwechseln. Darauf werden dann Chips gelegt, die einseitig mit einer Zahl beschriftet sind. Weiter dann wie oben: Chips umdrehen, beliebig oft benachbarte vertauschen, am Ende alle Chips auf den blauen Kreisen umdrehen, Voraussage einer speziellen Zahl (wenn alle Zahlen auf den Chips unterschiedlich sind) oder Augensumme der am Ende sichtbaren Zahlen.

6. Es wurde schon erwähnt, dass man auch mit Zahlen- und Bilderkarten oder mit Chips (einseitig beschriftet) arbeiten kann. Wichtig ist nur, dass für die gewählen Objekte der Begriff „umdrehen“ sinnvoll ist und dass sich die „Vorderseiten“ für die Aktion eignen: Bücher, CDs usw.

Danke, Helmut!
Ehrhard (Behrends), September 2015